Schubert cellと旗多様体上の軌道対応 (非可換代数系の表現と調和解析)

松木, 敏彦

数理解析研究所講究録 1294 巻 2002 年 35-43

Schubert cell と旗多様体上の軌道対応

京都大学総合人間学部　松木　敏彦 (Toshihiko Matsuki)
Faculty of Integrated Human Studies,
Kyoto University

本稿では、最近の筆者と S. Gindikin との共同研究について解説したい。

1 Duality

$G_{\mathbb{C}}$ を連結複素半単純リー群、$G_{\mathbb{R}}$ をその連結な real form とする。K を $G_{\mathbb{R}}$ の極大コンパクト部分群とし、$K_{\mathbb{C}}$ をその（連結な）複素化とする。任意の $G_{\mathbb{C}}$ の旗多様体 $X=G_{\mathbb{C}}/P$ 上の $K_{\mathbb{C}}$-軌道と $G_{\mathbb{R}}$-軌道との間には次の自然な 1 対 1 対応がある ([M3])。

$$K_{\mathbb{C}}\backslash X \ni S \longleftrightarrow S' \in G_{\mathbb{R}}\backslash X$$
$$\Longleftrightarrow S\cap S' \text{ は空でないコンパクト集合} \tag{1.1}$$

[GM1] において、$S\in K_{\mathbb{C}}\backslash X$ に対し、次のような $G_{\mathbb{C}}$ の部分集合を定義した。

$$C(S)=\{x\in G_{\mathbb{C}}\mid xS\cap S' \text{ は空でないコンパクト集合}\}$$

ただし、S' は (1.1) によって定まる X 上の $G_{\mathbb{R}}$-軌道である。明らかに $C(S)$ は左 $G_{\mathbb{R}}$-不変かつ右 $K_{\mathbb{C}}$-不変な集合である。

S が閉集合（$\Longleftrightarrow$ コンパクト）の場合、S' は開集合であるので、

$$C(S)=\{x\in G_{\mathbb{C}}\mid xS\subset S'\}$$

となる。したがって、この場合 $C(S)$ の単位元を含む連結成分 $C(S)_0$ は [WW] によって定義された（開 $G_{\mathbb{R}}$-軌道 S' に対する）cycle space である。（注：[WW] では $xS\subset S'$ を満たす部分集合 xS 達の集合の連結成分を考えているので、彼らの定義した cycle space は $C(S)_0/N_{G_{\mathbb{C}}}(S)\cap C(S)_0$ である。）

逆に、$X_0=G_{\mathbb{C}}/B$（B は $G_{\mathbb{C}}$ のボレル部分群）上の開 $K_{\mathbb{C}}$-軌道 S_0（ただ 1 つ）を考えよう。このとき S_0' は閉 $G_{\mathbb{R}}$-軌道であるので

$$C(S_0)=\{x\in G_{\mathbb{C}}\mid xS_0\supset S_0'\}$$

となる。連結成分 $C(S_0)_0$ は最近しばしば Iwasawa domain と呼ばれている。

例 1.1 $G_{\mathbb{C}}=SL(2,\mathbb{C})$, $G_{\mathbb{R}}=SL(2,\mathbb{R})$, $K_{\mathbb{C}}=SO(2,\mathbb{C})$ のとき、旗多様体 $X=G_{\mathbb{C}}/P\cong P^1(\mathbb{C})=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上の $G_{\mathbb{C}}$ の作用は 1 次分数変換

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z=\frac{az+b}{cz+d}$$

で与えられるが、X の $K_{\mathbb{C}}$-軌道分解は

$$\begin{aligned} X &= S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_0 \\ &= \{i\} \sqcup \{-i\} \sqcup \{\text{ その他 }\} \end{aligned}$$

であり、$G_{\mathbb{R}}$-軌道分解は

$$\begin{aligned} X &= S_1' \sqcup S_2' \sqcup S_0' \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \sqcup \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\} \sqcup P^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

である。$P_i = \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xi = i\}$, $P_{-i} = \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid x(-i) = -i\}$ はともに $G_{\mathbb{C}}$ の Borel 部分群であって、$P_i \cap P_{-i} = K_{\mathbb{C}}$ である。

$$\begin{aligned} C(S_1) &= \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xS_1 \subset S_1'\} = G_{\mathbb{R}}P_i \\ C(S_2) &= \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xS_2 \subset S_2'\} = G_{\mathbb{R}}P_{-i} \end{aligned}$$

は連結であるが、$C(S_0)$ は

$$\begin{aligned} C(S_0) &= \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xS_0 \supset S_0'\} \\ &= \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xS_1 \cup xS_2 \subset S_1' \cup S_2'\} \\ &= D_{+-} \sqcup D_{-+} \sqcup D_{++} \sqcup D_{--} \\ &= \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xS_1 \subset S_1',\ xS_2 \subset S_2'\} \sqcup \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xS_1 \subset S_2',\ xS_2 \subset S_1'\} \\ &\quad \sqcup \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xS_1 \subset S_1',\ xS_2 \subset S_1'\} \sqcup \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xS_1 \subset S_2',\ xS_2 \subset S_2'\} \end{aligned}$$

と 4 つの連結成分を持ち、

$$C(S_0)_0 = D_{+-} = C(S_1) \cap C(S_2)$$

であることがわかる。

[AG] において、次の集合 D (Akhiezer-Gindikin domain) が定義されている。$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ を $G_{\mathbb{R}}$ のリー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ のカルタン分解とし、$\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{m}$ の極大可換部分空間とする。$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t})$ を $\mathfrak{t}$ に関する制限ルート系とし、

$$\mathfrak{t}^+ = \{Y \in \mathfrak{t} \mid |\alpha(Y)| < \frac{\pi}{2} \text{ for all } \alpha \in \Sigma\}$$

とおいて

$$D = G_{\mathbb{R}}(\exp \mathfrak{t}^+)K_{\mathbb{C}}$$

と定義する。

$G_{\mathbb{C}}$ のすべての旗多様体上のすべての $K_{\mathbb{C}}$-軌道 S に対する $C(S)$ の共通部分

$$C = \bigcap C(S)$$

を考えよう。[GM1](Conjecture 1.3) において

予想 1.2 $C = DZ$ （Z は $G_{\mathbb{C}}$ の *center*）

と予想し、$G_{\mathbb{R}}$ が古典型のときおよびエルミート型のときにこれを証明した。連結成分については

$$C_0 = D \tag{1.2}$$

という予想になるが、[GM1] の Proposition 8.3 において

$$C_0 = C(S_0)_0$$

が示されているので、$D = C(S_0)_0$ を示せばよい。Barchini ([B]) によって $C(S_0)_0 \subset D$ が示され、$D \subset C(S_0)_0$ も最近一般的に証明された[1]ので、(1.2) は証明されている。（注： Iwasawa domain $C(S_0)_0$ は容易にスタイン集合である（注意 3.6 (iii)）ことが示せるので、(1.2) により [AG] の予想は証明されている。）

さらに、[GM1] Conjecture 1.6 において、多くの具体例に基づいて

予想 1.3 $S \neq X$ が *holomorphic type* でないときに $C(S)_0 = D$ であろう。

と予想した。

注意 1.4 (i) S が holomorphic type であるというのは $G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型で S が閉軌道のときのみに適用される概念で、次節の定義 2.2 のように定義される。したがって、$G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型でないときは、すべての軌道は nonholomorphic type であり、$G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型であっても、閉軌道でない軌道はすべて nonholomorphic type と定義する ([GM1])。

(ii) [FH] では $G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型でないときに、上記の予想 1.3 における S が閉軌道の場合の証明がなされているようである。彼らの証明は小林双曲性という複素幾何学の概念を用いるもので、筆者はまだその難解な部分を理解できていない。

(iii) しかしながら、[FH] がその Introduction において [GM1] を全く無視していることは不可解である。さらに、その Section 3 において両側剰余類分解 $G_{\mathbb{R}} \backslash G_{\mathbb{C}} / K_{\mathbb{C}}$ のジョルダン分解や elliptic element について論じられているが、それらはすべてすでに [M4] で証明された事柄である。

2 エルミート型の場合

$G_{\mathbb{R}}$ が単純エルミート型とする。このとき、K のリー環 $\mathfrak{k}$ は 1 次元の center を持つが、その nontrivial element Y を取るとき、iY によって $G_{\mathbb{C}}$ の 1 つの極大放物型部分群

$$P = K_{\mathbb{C}} \exp \mathfrak{n}$$

[1] [H], [FH] には [BHH] (new version) で示された D 上のある関数の多重劣調和性を用いた複素解析的証明が述べられているが、最近の筆者の研究 [M5] により複素解析は不要であることがわかった。

が定まる。自然な埋め込み

$$\iota : G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \hookrightarrow G_{\mathbb{C}}/P \times G_{\mathbb{C}}/\overline{P}$$

が

$$xK_{\mathbb{C}} \mapsto (xP, x\overline{P})$$

によって定義できる（[WZ1]）。このとき、容易に

命題 2.1　([GM1] Proposition 2.2)　$\iota(D/K_{\mathbb{C}}) = G_{\mathbb{R}}P/P \times G_{\mathbb{R}}\overline{P}/\overline{P}$

が示せる。[BHH] でも同じことが証明されているようであるが、難解である。

B を P に含まれるボレル部分群とする。$g \mapsto \theta(\overline{g})$ は $G_{\mathbb{C}}$ の compact real form $U = K \exp i\mathfrak{m}$ に関する conjugation だから、$T = B \cap \theta\overline{B}$ は $G_{\mathbb{C}}$ のカルタン部分群である。w_0 を T に関するワイル群の（B に関する）最長元とすると

$$w_0 B w_0^{-1} = \theta\overline{B}$$

となる。

$$S_1 = P = K_{\mathbb{C}}P = K_{\mathbb{C}}B, \qquad S_2 = \overline{P}w_0 = K_{\mathbb{C}}\overline{P}w_0 = K_{\mathbb{C}}(w_0 B w_0^{-1})w_0 = K_{\mathbb{C}}w_0 B$$

によって、２つの閉 $K_{\mathbb{C}}$-B 両側剰余類 S_1, S_2 を定義する。

$$S_1' = G_{\mathbb{R}}P = G_{\mathbb{R}}B, \qquad S_2' = G_{\mathbb{R}}\overline{P}w_0 = G_{\mathbb{R}}w_0 B$$

であるから、命題 2.1 により、

$$x \in D \Longleftrightarrow xS_1 \subset S_1' \text{ かつ } xS_2 \subset S_2'$$

すなわち

$$D = C(S_1) \cap C(S_2)$$

であることがわかる。

定義 2.2　B を含む放物型部分群 Q に対し、$\pi : G_{\mathbb{C}}/B \to G_{\mathbb{C}}/Q$ を自然な projection とする。$G_{\mathbb{C}}/Q$ 上の $K_{\mathbb{C}}$-軌道 S が

$$S = \pi(S_1) \text{ または } S = \pi(S_2)$$

のとき、S は holomorphic type であるといい、そうでないとき nonholomorphic type であるという。([WZ1] の定義と同値であることが容易に示せる。)

例 2.3 $G_{\mathbb{C}} = SL(3, \mathbb{C})$, $G_{\mathbb{R}} = SU(2,1)$, $K_{\mathbb{C}} = \{g \in G_{\mathbb{C}} \mid gV_{\pm} = V_{\pm}\}$ とする。ただし、$V_+ = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$, $V_- = \mathbb{C}e_3$（e_1, e_2, e_3 は $\mathbb{C}^3$ の標準基底）である。$G_{\mathbb{C}}$ のボレル部分群

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{C}} \right\}$$

を取り、B を含む放物型部分群 P_1, P_2 を

$$P_1 = \{g \in G_{\mathbb{C}} \mid gV_+ = V_+\}, \qquad P_2 = \{g \in G_{\mathbb{C}} \mid g\mathbb{C}e_1 = \mathbb{C}e_1\}$$

で定義する。$X_0 = G_{\mathbb{C}}/B$ 上の $K_{\mathbb{C}}$-軌道は 6 個あって、それらは次の図のようになっている ([MO] Fig. 5)。

$$\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[dr, "1"'] & & S_3 \arrow[dl, "1"] \arrow[dr, "2"'] & & S_2 \arrow[dl, "2"] \\
& S_4 \arrow[dr, "2"'] & & S_5 \arrow[dl, "1"] & \\
& & S_0 & &
\end{tikzcd}$$

図において、例えば $S_1 \xrightarrow{1} S_4$ は

$$S_1P_1 = S_4P_1 \text{ かつ } \dim_{\mathbb{C}} S_1 + 1 = \dim_{\mathbb{C}} S_4$$

を意味する。したがって、S_1, S_2, S_3 が閉 $K_{\mathbb{C}}$-軌道、S_0 が開 $K_{\mathbb{C}}$-軌道である。

[GM1] Proposition 2.4 において、$X_0 = G_{\mathbb{C}}/B$ 上の任意の閉 $K_{\mathbb{C}}$-軌道 S に対し、$C(S_1) \cap C(S_2) \subset C(S)$ が証明されているが、アイデアは非常に簡単なので、この例で考えてみよう。$S = S_3$ のときだけが問題である。

$x \in C(S_1) \cap C(S_2)$ とすると、$xS_1 \subset S_1'$ であるから

$$xS_1P_1 \subset S_1'P_1$$

となり、図により

$$S_1P_1 = S_1 \sqcup S_3 \sqcup S_4, \qquad S_1'P_1 = S_1' \sqcup S_3' \sqcup S_4'$$

([M1]) であるから、

$$xS_1 \sqcup xS_3 \sqcup xS_4 \subset S_1' \sqcup S_3' \sqcup S_4' \tag{2.1}$$

である。同様にして $xS_2 \subset S_2'$ から

$$xS_2 \sqcup xS_3 \sqcup xS_5 \subset S_2' \sqcup S_3' \sqcup S_5' \tag{2.2}$$

が得られるので、(2.1) と (2.2) の共通部分を取れば

$$xS_3 \subset S_3'$$

が得られる。よって

$$C(S_1) \cap C(S_2) \subset C(S_3)$$

が示された。

注意 2.4 [GM1] において、[WZ1] の Theorem 3.8 の証明にはギャップがあることを指摘したが、これは [WZ2] によって修正された。したがって、$G_{\mathbb{R}}$ がエルミート型のとき、任意の旗多様体 X 上のすべての nonholomorphic type の閉 $K_{\mathbb{C}}$-軌道 S に対し、

$$C(S)_0 \subset D$$

が成り立つ。[GM1] Proposition 2.4 で

$$D \subset C(S)_0$$

は示されている[2]ので

$$D = C(S)_0$$

である。[WZ2] には [GM1] Proposition 2.4 が彼らの証明より less direct であるとか、not actually stated in [GM1] だとか書いてあるが全く事実に反する。

3 $K_{\mathbb{C}}$-B 両側剰余類の Schubert cell

ボレル部分群 B に関する simple root α に対し、$G_{\mathbb{C}}$ の放物型部分群 P_α ($\dim_{\mathbb{C}} P_\alpha = \dim_{\mathbb{C}} B + 1$) が

$$P_\alpha = B \sqcup Bw_\alpha B$$

によって定義できる。[GM2] において次のことを示した。

補題 3.1 $K_{\mathbb{C}}$-B 両側剰余類 S_1 に対し、

(i) $\dim_{\mathbb{C}} S_1P_\alpha = \dim_{\mathbb{C}} S_1 \Longrightarrow S_1^{cl}P_\alpha = S_1^{cl}$

(ii) $\dim_{\mathbb{C}} S_1P_\alpha = \dim_{\mathbb{C}} S_1 + 1 \Longrightarrow S_1^{cl}P_\alpha = S_2^{cl}$ （S_2 はある $K_{\mathbb{C}}$-B 両側剰余類）

証明は [M2] Lemma 3 のように $SL(2,\mathbb{C})$ の旗多様体 $P^1(\mathbb{C})$ 上の軌道分解に帰着すればよい。

定理 3.2 任意の $K_{\mathbb{C}}$-B 両側剰余類 S_1 と $w \in W$ （W はワイル群）に対し、

(i) $S_1^{cl}(BwB)^{cl} = S_2^{cl}$ を満たす $K_{\mathbb{C}}$-B 両側剰余類 S_2 が存在する。

(ii) (minimal expression) 次の 3 条件を満たす $w' \in W$ が存在する。

(a) $w' < w$ (Bruhat order)

(b) $\ell(w') = \dim_{\mathbb{C}} S_2 - \dim_{\mathbb{C}} S_1$ （$\ell(w')$ は w' の長さ）

(c) $S_1^{cl}(Bw'B)^{cl} = S_2^{cl}$

[2] もっと一般的な [M5] の結果を用いてもよい。

証明 $w = w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_\ell}$ を w の最短表示とするとき、

$$(BwB)^{cl} = P_{\alpha_1} \cdots P_{\alpha_\ell}$$

だから、(i)、(ii) ともに補題 3.1 からすぐに導かれる。 □

（複素）余次元 1 の $K_{\mathbb{C}}$-B 両側剰余類の集合を $\{S_j \mid j \in J\}$ とし、$T_j = S_j^{cl}$ とする。（例 2.3 の場合、$J = \{4, 5\}$ である。）

定義 3.3 (i) $K_{\mathbb{C}}$-B 両側剰余類 S に対し、

$$J(S) = \{j \in J \mid S^{cl}(BwB)^{cl} = T_j \text{ for some } w \in W\}$$

と定義する。（例 2.3 の場合、$J(S_1) = \{4\}$, $J(S_2) = \{5\}$, $J(S_3) = \{4, 5\}$, $J(S_4) = \{4\}$, $J(S_5) = \{5\}$, $J(S_0) = \phi$ となる。）

(ii) 任意の J の部分集合 J' に対し、

$$\Omega(J') = \{x \in G_{\mathbb{C}} \mid xT_j \cap S_0' = \phi \text{ for all } j \in J'\}_0$$

とおく。（注： 次の定理 3.5 により、$G_{\mathbb{C}}$ における S_0 の補集合は $\bigcup_{j \in J} T_j$ であることが示せるので、$\Omega(J) = C(S_0)_0$ である。）

補題 3.4 S_0 以外の任意の $K_{\mathbb{C}}$-B 両側剰余類 S に対し、

$$\dim_{\mathbb{C}} SP_\alpha = \dim_{\mathbb{C}} S + 1$$

となる *simple root* α が存在する。

定理 3.5 $\ell(w) < \mathrm{codim}_{\mathbb{C}} S$ ならば $S^{cl}(BwB)^{cl}$ はある T_j $(j \in J)$ に含まれる。

定理 3.2 と定理 3.5 により、[GM1] Proposition 8.3 と同様の議論を用いて、次のことが示せる。

系 3.6 $G_{\mathbb{C}}$ の閉 $K_{\mathbb{C}}$-P 両側剰余類 S に対し、S に含まれる *dense* な $K_{\mathbb{C}}$-B 両側剰余類を S_1 とすると、

$$C(S)_0 = \Omega(J(S_1))$$

注意 3.7 (i) 明らかに $\Omega(J) \subset \Omega(J(S_1))$ であるから

$$C(S_0)_0 \subset C(S)_0$$

が従うが、これはすでに [GM1] Proposition 8.3 で証明されている事柄である。

(ii) 系 3.6 と同様の結果が [HW] に述べられているが、彼らの複雑な定義には本質的な部分に誤りがある（詳しくは [GM2] Remark 4)。したがって、当然ながら証明も間違っている[3]。

(iii) 任意の J の部分集合 $J' \neq \phi$ に対し、$\Omega(J')$ は $G_{\mathbb{C}}$ における無限個の複素解析的超曲面族 $\{gT_j^{-1} \mid j \in J', \ g \in S_0'\}$ の補集合の連結成分なのでスタインである。したがって、cycle space のスタイン性に関する [W] の結果は系 3.6 から導かれる（[HW] 参照)。

[3]これについては、最近、我々の指摘どおりに修正がなされた。

References

[AG] D. N. Akhiezer and S. G. Gindikin. On Stein extensions of real symmetric spaces. *Math. Ann.*, 286:1–12, 1990.

[B] L. Barchini. Stein extensions of real symmetric spaces and the geometry of the flag manifold. preprint

[BHH] D. Burns, S. Halverscheid and R. Hind. The geometry of Grauert tubes and complexification of symmetric spaces. preprint (CV/0109186)

[FH] G. Fels and A. Huckleberry. Characterization of cycle domains via Kobayashi hyperbolicity. preprint (AG/0204341)

[HW] A. Huckleberry and J. A. Wolf. Schubert varieties and cycle spaces. preprint (AG/0204033)

[GM1] S. Gindikin and T. Matsuki. Stein extensions of Riemann symmetric spaces and dualities of orbits on flag manifolds. preprint (MSRI-Preprint 2001-028)

[GM2] S. Gindikin and T. Matsuki. A remark on Schubert cells and duality of orbits on flag manifolds. preprint (RT/0208071)

[H] A. Huckleberry. On certain domains in cycle spaces of flag manifolds. *Math. Annalen*, 323:797–810, 2002.

[M1] T. Matsuki. Orbits on affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups. *Hiroshima Math. J.*, 12:307–320, 1982.

[M2] T. Matsuki. Closure relations for orbits on affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups. *Adv. Studies in Pure Math.*, 14:541–559, 1988.

[M3] T. Matsuki. Closure relations for orbits on affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups. Intersections of associated orbits. *Hiroshima Math. J.*, 18:59–67, 1988.

[M4] T. Matsuki. Double coset decompositions of reductive Lie groups arising from two involutions. *J. of Algebra*, 197:49–91, 1997.

[M5] T. Matsuki. Stein extensions of Riemann symmetric spaces and some generalization. preprint (RT/0208175)

[MO] T. Matsuki and T. Oshima. Embeddings of discrete series into principal series. In *The Orbit Method in Representation Theory*, 147–175. Birkhäuser, 1990.

[WW] R. O. Wells and J. A. Wolf. Poincaré series and automorphic cohomology on flag domains. *Annals of Math.*, 105:397–448, 1977.

[W] J. A. Wolf. The Stein condition for cycle spaces of open orbits on complex flag manifolds. *Annals of Math.*, 136:541–555, 1992.

[WZ1] J. A. Wolf and R. Zierau. Linear cycle spaces in flag domains. *Math. Ann.*, 316:529–545, 2000.

[WZ2] J. A. Wolf and R. Zierau. A note on the linear cycle spaces for groups of Hermitian type. to appear in *J. of Lie Theory*.